23/11/2017

Μάθημα 13ο

(E_0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y_0 = 0$

Πρόταση

Ας είναι y_1 λύση της (E_0) στο I με $y_1(t) \neq 0$ $t \in I$.

Για $\boxed{y = y_1 u}$ και $\boxed{u' = v}$ η εξ. (E_0) μετασχηματίζεται σε μια $(n-1)$ τάξη ομογενούς γραμμ. διαφ. εξίσωσης (E_0^*)

Αν $\underbrace{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}}$ Β.Σ.Λ. της (E_0^*) τότε οι συναρτήσεις:

$$y_1(t) \quad , \quad y_{n+1}(t) = y_1(t) \int_{t_0}^{t} \underbrace{v_i(s)}\, ds \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \quad , \quad t \in I$$

αποτελούν ένα Β.Σ.Λ. της (E_0^*)

Απόδειξη.

Ας είναι y_1 λύση της (E_0). Θέτω $y = y_1 u$, $t \in I$.

a_0 | $y = y_1 u$

a_1 | $y' = y_1' u + y_1 u'$

a_2 | $y'' = y_1'' u + y_1' u' + y_1' u' + y_1 u'' = y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u''$

$\vdots$

a_{n-1} | $y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} u + \binom{n-1}{1} y_1^{(n-2)} u' + \dots + \binom{n-1}{n-2} y_1' u^{(n-2)} + y_1 u^{(n-1)}$

a_n | $y^{(n)} = y_1^{(n)} u + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} u' + \dots + \binom{n}{n-1} y_1' u^{(n-1)} + y_1 u^{(n)}$

$$\overbrace{}^{\substack{0 \text{ αφού } y_1 \text{ λύση} \\ \|}}$$

$$L(y) = u\left[a_0 y_1 + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_n y^{(n)}\right]$$

$$+ \underset{\substack{\| \\ v}}{u'}\left[\underbrace{a_0 y_1 + a_1 2 y_1' + \dots + a_{n-2}\binom{n-1}{1} y_1^{(n-2)} + \binom{n}{1} y^{(n-1)} \cdot a_{n-1}}_{\substack{\| \\ A_0}}\right]$$

$$+ \dots$$

$$\vdots$$

$$+ \underset{\substack{\| \\ v^{(n-2)}}}{u^{(n-1)}} \underbrace{[\dots]}_{A_{n-2}} + \underbrace{a_0 y_1}_{A_{n-1}} \underset{\substack{\| \\ v^{(n-1)}}}{u^{(n)}}$$

Ισχύει:
Άρα:

$$u' = v$$
$$u'' = v'$$
$$\vdots$$
$$u^{(n)} = v^{(n-1)}$$

Άρα καταλήγουμε: $\boxed{A_{n-1} \cdot v^{(n-1)} + A_{n-2} v^{(n-2)} + \dots + A_0 v = 0}$ (E_0^*)

(Μπορούμε να πάμε και ανάποδα)

▲ Ας είναι $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ένα Β.Σ.Λ. της (E_0^*)

τότε $u(t) = \int_{t_0}^{t} v_i(s)\,ds \implies$

$$\implies y_{i+1}(t) = y_1(t) \int_{t_0}^{t} v_i(s)\,ds \qquad i = 1, \dots, v-1$$

είναι $v-1$ λύσεις της (E_0)
(το αυθαίρετο στο t_0)

Θα αποδείξω ότι οι λύσεις $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι γρ. ανεξ.

Σύμφωνα με τον ορισμό:

Αν $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ με:

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \quad , t \in I$.

Τότε:

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_1(t) \cdot \int_0^t v_1(s)\,ds + \dots + c_n y_1(t) \int_0^t v_{n-1}(s)\,ds = 0 \quad , t \in I$$

$$y_1(t) \underbrace{\left[c_1 + c_2 \int_0^t v_1(s)\,ds + \dots + c_n \int_0^t v_{n-1}(s)\,ds \right]}_{=0} = 0$$

$y_1(t) \neq 0$ Άρα αναγκαστικά:

$\Rightarrow \quad c_2 v_1(t) + \dots + c_n v_{n-1}(t) = 0 \quad , t \in I$.

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ γραμμ. ανεξ. στο I

Άρα: $c_2 = 0 = c_3 = \dots = c_{n-1}$

$\Rightarrow \quad c_1 = 0$

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ άρα $y_1, \dots, y_n$ γραμμ. ανεξ. λύσεις της (E_0) ▲

Παράδειγμα 7

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0 \quad , x > -1/2$$

$$\boxed{y_1(x) = e^{c\cdot x}}$$

Θα την υποβιβάσουμε σε εξ πρώτης τάξης
θα την λύσουμε κατά τα γνωστά
και μετά θα κατασκευάσουμε ένα ΒΣΛ

(...)

Βρίσκουμε $c=2$. Άρα $\boxed{y_1(x) = e^{2x}}$

Θέτω $\boxed{y = y_1 u}$

$$(2x+1)[y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''] - 4(x+1)[y_1'u + y_1u'] + 4y_1u = 0$$

$$u\underbrace{[(2x+1)y_1'' - 4(x+1)y_1' + 4y_1]}_{=0} +$$

$$+ u'[2y_1'(2x+1) - 4(x+1)y_1] + (2x+1)y_1u'' = 0$$

$$\Rightarrow u'[4e^{2x}(2x+1) - 4e^{2x}(x+1)] + e^{2x}(2x+1)\cdot u'' = 0$$

$v = u'$

$$\Rightarrow \boxed{(2x+1)v' + 4xv = 0} \quad , x > -1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x) = e^{-\int^x \frac{4s}{2s+1}ds}} \overset{(\dots)}{=} e^{-2x}(2x+1)$$

Β.Σ.Λ. $\quad y_1(x) \, , \; y_2(x) = y_1(x)\int_0^x v_1(s)\,ds$

$$y_2(x) = e^{2x}\int_0^x e^{-\int_0^t \frac{4s}{2s+1}ds}\,dt$$

Άσκηση

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 9xy' - 9y = 0 \quad , x > 0$$

$$\boxed{y_1(x) = x}$$

$$y = y_1 u = x \cdot u$$

$$x^3 (u''' x + 3u'' \cdot 1) - 4x^2 \cdot (u'' x + 2u' \cdot 1 + 0) + 9x(u'x + u) - 9xu = 0$$

(Πρέπει να φεύγει το u)

Φεύγει και μετά θέτουμε $\boxed{u' = v}$

$$\boxed{x^2 v'' - x v' + v = 0}$$

→ Αυτήν εδώ έχει μία φανερή λύση $\boxed{v_1 = x}$

επίσης θα βρούμε (...) $\boxed{v_2(x) = x \log x}$

ΒΣΛ: $y_1(x) = x$

$y_2(x) = y_1(x) \int_1^x s\,ds$ | $y_3(x) = y_1(x) \int_1^x s \log s\,ds$

Το 1 θα το παίρουμε μέσα από το πεδίο ορισμού.

(Εδώ το 0 δεν μπορούμε)

Προσοχή στις 7,8 σελ 83.

Άσκηση 9 σελ 83.

$$(x^3 - 2x^2)y'' - (x^3 + 2x^2 - 6x)y' + (3x^2 - 6)y = 0, x > 2$$

$$y_1(x) = x^c.$$

1º βήμα → βρίσκω την c.
2º βήμα → υποβιβασμός

(σπίτι)

Ασκήσεις #3 φυλλάδιο

① f, g Lipschitz αν S ⇝ $kf + mg$ είναι
$|f|$ είναι
fg δεν είναι
f^2 δεν είναι
f/g δεν είναι

π.χ. $f(t,x) = x$, $g(t,x) = x$ → $fg = x^2$ δεν είναι Lipschitz (αποδ. με αντιπαράδειγμα)

② $S = [a,b] \times [c,d]$
Να εξεταστεί αν f: Lipschitz
f^{2017}, $h = \frac{1}{f}$, $f(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$

Ορισμός: $|f^{2017}(t,x) - f^{2017}(t,y)| = |f(t,x) - f(t,y)| \, |f^{2016} + f^{2015} \ldots|$
↳ ταυτότητα: $a^{\nu} - b^{\nu}$

(*)

$$\leq |M^{2016} + M^{2015} N + \dots |$$

$|f| \leq M$

$|g| \leq N$

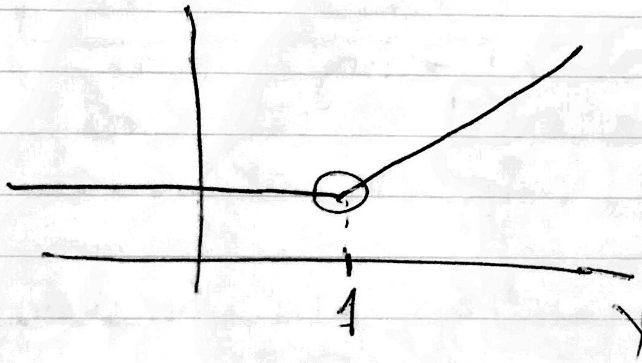
$$\frac{M^{2017} - N^{2017}}{N - N}$$ ↯

(3) $f(t,y) = \dfrac{2t}{1+t} \max\{1, y\}$, $S = [0, \infty) \times \mathbb{R}$

$\Downarrow$ Δεν είναι παραγωγίσιμη.

Άρα δεν μπορώ να χρησ. το Θεώρημα

Άρα πηγαίνουμε με τον ορισμό.



(8) $y' = \sqrt{2} + \sin(y^2 + y)$, $t \geq 0$

$\cos(y^2 + y) \cdot (2y + 1)$

$f(t,y) = t^3 e^{-t y^2}$

όσο μεγαλώνει το t τόσο μεγαλώνει το φράγμα

Δεν είναι φραγμένη.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| t^3 (-2t) y e^{-t y^2} \right| = 2t^4 y e^{-t y^2}$$

$$t^{-7/2}\underbrace{(\sqrt{t}\,y)}_{\theta}\, e^{-(\sqrt{t}y)^2} \leq M \quad \forall \theta \geq 0$$

$$f(\theta) = \theta \cdot e^{-\theta^2} \qquad \theta \geq 0$$

» το φράζουμε [illegible]

$$\lim_{\theta \to +\infty} f(\theta) = 0$$